

# Documentacion unificada de la libreria

## Hidden Attractors Fractional Order: teoria, codigo, ejemplos y figuras

Hidden Attractors Fractional Order

Actualizado: 18 de mayo de 2026

## Índice

<b>1. Proposito del documento</b>	<b>1</b>
<b>2. Indice tematico consolidado</b>	<b>2</b>
<b>3. Sistema de Chua fraccionario</b>	<b>2</b>
<b>4. Estabilidad local y criterio de Matignon</b>	<b>2</b>
<b>5. Forma de Lur'e, funcion descriptiva y semillas</b>	<b>3</b>
<b>6. Verificacion de ocultedad</b>	<b>3</b>
<b>7. Resultados consolidados del caso no suave</b>	<b>3</b>
7.1. Mejores candidatos y lectura . . . . .	4
7.2. Calificacion numerica por candidato . . . . .	5
7.3. Detalle numerico de la replica Danca . . . . .	7
7.4. Trayectorias lanzadas y targets . . . . .	8
7.5. Comparacion con la variante arctan . . . . .	9
<b>8. Funciones publicas de la libreria</b>	<b>9</b>
<b>9. Ejemplo ejecutable con trayectoria real</b>	<b>10</b>
<b>10. Figuras integradas y secciones de graficacion</b>	<b>10</b>
10.1. Galeria API: trayectoria real cargada desde CSV . . . . .	11
10.2. Replica Danca y candidatos de referencia . . . . .	14
10.3. Cuencas y refinamiento de regiones . . . . .	16
10.4. Verificacion dirigida Machado . . . . .	19
10.5. Corrida refinada Machado . . . . .	22
10.6. Robustez geometrica por contratos numericos . . . . .	24
10.7. Geometria esferica alrededor de equilibrios . . . . .	26
10.8. Figuras pendientes de regeneracion . . . . .	28
<b>11. Referencias por metodo</b>	<b>28</b>
<b>12. Bibliografia minima</b>	<b>29</b>

## 1. Proposito del documento

Este reporte unifica el material tecnico que antes estaba separado en varios archivos  $\LaTeX$  dentro de `version_2/docs`. La organizacion sigue un indice tematico: teoria matematica, referencias, funciones de la libreria, ejemplos reproducibles, figuras generadas y lectura cientifica de las salidas.

La regla documental del proyecto es conservadora: ninguna funcion descriptiva, grafica o diagnostico numerico declara por si solo la existencia de un atractor oculto. La lectura de ocultedad se basa en la clasificacion de Leonov–Kuznetsov y requiere analizar si la cuenca del atractor candidato intersecta vecindades de los equilibrios.

## 2. Indice tematico consolidado

Este archivo es el reporte activo unico. Los documentos LaTeX anteriores se absorbieron aqui para evitar mantener resúmenes paralelos con resultados desfasados. La tabla siguiente registra que contenido quedo consolidado y en que parte del reporte se usa.

Contenido absorbido	Ubicacion en este reporte
<code>reporte_matematico_pipeline</code>	Teoria del sistema de Chua fraccionario, forma de Lur'e, transferencia fraccionaria, funcion descriptiva, continuacion, cuencas y advertencias de interpretacion.
<code>reporte_detallado_pipeline_hidden_attractors</code>	Auditoria de archivos historicos, rutas Lur'e/Machado, Matignon, verificacion de ocultedad y checklist tecnico.
<code>machado_chua_fraccionario</code>	Extension tipo Machado usada como generador de semillas armonicas auxiliares.
<code>resumen_verificacion_danca_lure_machado</code>	Resumen de replicacion Danca, candidatos Lur'e y candidatos Machado.
<code>resumen_chua_no_suave_arctan</code>	Comparacion entre Chua no suave y variante arctan.
<code>resumen_chua_corridas_extraidas</code>	Inventario de corridas disponibles y figuras extraidas.

## 3. Sistema de Chua fraccionario

El sistema base usado en las corridas principales es el Chua no suave de orden fraccionario:

$${}^C D_t^q x = \alpha(y - x - f(x)), \quad (1)$$

$${}^C D_t^q y = x - y + z, \quad (2)$$

$${}^C D_t^q z = -\beta y - \gamma z, \quad (3)$$

donde  $0 < q \leq 1$ . La no linealidad por tramos es

$$f(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|). \quad (4)$$

El modelo de Chua se documenta contra *Chaos in Chua's Circuit*. La extension fraccionaria, los parametros de la prueba no suave y el uso de ABM como referencia de comparacion se documentan contra *Hidden Chaotic Attractors in Fractional-Order Systems*. La derivada de Caputo remite a *Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II*.

## 4. Estabilidad local y criterio de Matignon

Para sistemas fraccionarios conmensurados linealizados,

$${}^C D_t^q X = AX,$$

el criterio de Matignon establece estabilidad local asintotica cuando los autovalores cumplen

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}.$$

Este criterio se cita a partir de *Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing*. En el proyecto se usa como diagnostico local de equilibrios; no reemplaza la prueba global de cuencas.

## 5. Forma de Lur'e, funcion descriptiva y semillas

La ruta de semillas se basa en escribir el sistema como una forma tipo Lur'e:

$${}^C D_t^q X = PX + b\psi(r^T X),$$

y cerrar una condicion armonica mediante una transferencia fraccionaria evaluada en  $\lambda = (i\omega)^q$ . Esta etapa sigue el enfoque de balance armonico/frecuencia usado en *A Frequency Approach for Analyzing and Controlling Chaos in Nonlinear Circuits*.

La extension tipo Machado se documenta como una familia auxiliar de semillas, no como demostracion de periodicidad exacta en Caputo. La advertencia conceptual se apoya en la literatura sobre no existencia de soluciones periodicas exactas no constantes en sistemas fraccionarios autonomos, incluida *A Proof for Non Existence of Periodic Solutions in Time Invariant Fractional Order Systems*.

## 6. Verificacion de ocultedad

La distincion usada por la libreria es:

self-excited  $\iff$  la cuenca intersecta vecindades de equilibrios,

hidden  $\iff$  la cuenca no intersecta esas vecindades bajo el contrato probado.

Esta lectura sigue *Hidden Attractors in Dynamical Systems: From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuits* y *Hidden Attractors in Dynamical Systems: Systems with No Equilibria, Multistability and Coexisting Attractors*.

En codigo, esto se traduce en una secuencia conservadora:

semilla armonica  $\Rightarrow$  atractor observado  $\Rightarrow$  comparacion con target  
 $\Rightarrow$  robustez  $\Rightarrow$  pruebas desde vecindades de equilibrios  
 $\Rightarrow$  lectura de ocultedad.

Si aparece una trayectoria TARGET desde una vecindad de equilibrio, el candidato no debe etiquetarse como oculto bajo ese contrato.

## 7. Resultados consolidados del caso no suave

El caso principal del repositorio es el Chua fraccionario no suave con

$$\alpha = 8.4562, \quad \beta = 12.0732, \quad \gamma = 0.0052, \quad m_0 = -0.1768, \quad m_1 = -1.1468, \quad q = 0.9998.$$

El proposito de los analisis no fue declarar ocultedad desde una semilla armonica, sino someter candidatos a una cadena de pruebas: reproduccion de atractor, continuacion, comparacion seccional, controles desde vecindades de equilibrios, cuencas, robustez numerica y comparacion con la replica tipo Danca.

Tabla 2: Lectura global de las corridas principales del Chua no suave.

Bloque	Evidencia disponible	Decision conservadora
Pipeline no suave <code>chua_piecewise</code>	Verificacion EFORK/C con 504 trayectorias de detalle y 22 contactos <b>TARGET</b> desde radios muestreados alrededor de $E_+$ y $E_-$ .	<code>not_supported_by_sample</code> ; hay atractor numerico, pero no se debe etiquetar como oculto bajo esa muestra.
Replica Danca ABM	ABM con historia completa, $h = 0.05$ , $t_f = 500$ , $\delta = 0.01$ . La referencia localizada fue <code>bounded_nontrivial</code> ; desde vecindades de equilibrios inestables aparecieron 102/200 contactos <b>TARGET</b> .	La replica reproduce dinamica acotada tipo Danca, pero no soporta ocultedad: 54/100 contactos desde $E_+$ y 48/100 desde $E_-$ .
Ruta Lur'e sesgada	5208 evaluaciones crudas, 121 candidatos filtrados, 968 semillas y 4 supervivientes de continuacion. El mejor por residual fue <code>lure_biased_q_0p99980_rank_0001</code> .	No hay <code>hidden_verified</code> : <code>rank_0001</code> toca <b>TARGET</b> desde $E_+$ a distancia $10^{-5}$ ; <code>rank_0004</code> toca desde $E_+$ y $E_-$ .
Ruta Machado	Barrido principal con 552 registros. Los dos candidatos top fueron <code>branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000</code> y <code>branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699</code> .	Ambos quedan bloqueados como ocultos: una prueba dirigida desde $E_-$ , a distancia $10^{-5}$ , encontro y reprodujo contacto <b>TARGET</b> en cada caso.
Cascarones esfericos top-3	4500 trayectorias: 1500 por candidato para dos Machado y un Lur'e, en radios $10^{-5}$ a $10^{-3}$ alrededor de $E_0, E_+, E_-$ . No hubo <b>TARGET</b> en esos cascarones.	Resultado compatible solo con esa muestra esferica; no cancela contactos dirigidos mas especificos ya reproducidos.
Robustez geometrica	18 trayectorias de superposicion: 3 candidatos por 6 contratos numericos con cambios en $h, L_m$ y $t_f$ .	Sirve para persistencia geometrica. No decide ocultedad ni convierte un candidato con contacto desde equilibrio en oculto.

## 7.1. Mejores candidatos y lectura

Tabla 3: Candidatos que concentraron el analisis posterior.

Candidato	Por que fue seleccionado	Resultado posterior
<code>lure_biased_q_0p99980_rank_0001</code>	Mejor residual de la busqueda Lur'e sesgada: $ R  \approx 6.82 \times 10^{-13}$ , $\omega = 2.0402861$ , $A = 5.8517686$ , $\rho_H = 0.123874$ .	Sobrevivio continuacion como <code>bounded_nontrivial</code> , pero una condicion inicial desde $E_+$ a $10^{-5}$ llega a <b>TARGET</b> . No es <code>hidden_verified</code> .

Candidato	Por que fue seleccionado	Resultado posterior
lure_biased_q_0p99980_rank_0004	Superviviente Lur'e de continuacion, revisado porque era el unico candidato no descartado inmediatamente por redundancia visual con rank_0001.	El filtro temprano encontro 8 direcciones TARGET desde $E_+$ y 4 desde $E_-$ , todas a distancia $10^{-5}$ .
branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000	Mejor candidato Machado por la regla de seleccion: menor numero de contactos en barrido, mayor rango en $x$ y menor norma de semilla.	Corrida refinada parcial: 1622 filas, 0 TARGET en $E_0$ para radios completados. Luego la prueba dirigida desde $E_-$ encontro y reprodujo TARGET; se documenta como autoexcitado/no oculto bajo el contrato probado.
branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699	Segundo candidato Machado top; tambien reproduce geometria acotada y fue usado como semilla compatible para la replica visual Danca.	La prueba dirigida desde $E_-$ encontro y reprodujo TARGET a distancia $10^{-5}$ . No debe reportarse como oculto.
machado_mu2_seed_project	Semilla localizada para reproducir la figura Danca cuando el articulo no publica la condicion inicial exacta de su Fig. 3.	ABM con historia completa produce una referencia acotada no trivial, pero la prueba local Danca $\delta = 0.01$ produce 102/200 contactos desde equilibrios inestables.

## 7.2. Calificacion numerica por candidato

La calificacion usada en esta tabla separa dos preguntas. Un candidato puede ser *bueno como atractor numerico* si produce una trayectoria acotada no trivial y persistente. Ese mismo candidato puede ser *malo como atractor oculto* si alguna trayectoria lanzada desde una vecindad de equilibrio llega a la clase TARGET. En este reporte, "malo como oculto" no significa que la dinamica sea inutil; significa que falla la definicion operacional de ocultedad bajo el contrato probado.

Tabla 4: Calificacion por candidato con resultados numericos principales.

Candidato	Atractor observado	Pruebas lanzadas y targets	Calificacion final
chua_piecewise / semilla objetivo actual	Si. Semilla de verificacion $(-4.1141, -0.3339, 7.1941)$ referencia con 22 puntos seccionales.	504 trayectorias locales: 168 desde cada punto. Total: 22 TARGET; 12 desde $E_+$ y 10 desde $E_-$ .	Bueno como atractor numerico del caso no suave; malo como oculto bajo la muestra, <b>not_supported_by_sample</b> .

Candidato	Atractor observado	Pruebas lanzadas y targets	Calificacion final
machado_mu2_seed_project / replica Danca ABM	Si. ABM con historia completa, $h = 0.05$ , $t_f = 500$ ; bounded_ nontrivial; rangos de cola (11.344, 3.292, 17.036).	200 trayectorias locales: 54/100 TARGET desde $E_+$ y 48/100 desde $E_-$ . Corte $xy$ : 10201 CI, 976 targets ABM.	Bueno como replica visual/numerica de Danca; malo como oculto en esta replicacion porque la cuenca toca vecindades inestables.
lure_biased_q_0p99980_rank_0001	Si. Superviviente EFORK bounded_ nontrivial; rango (13.504, 3.378, 18.630) entropia PSD 0.207.	Busqueda: 5208 evaluaciones, 121 filtrados, 968 semillas. Filtro local: 1/1 TARGET desde $E_+$ a $10^{-5}$ . Esferas: 0/1500 TARGET. Robustez: 6/6 acotadas.	Muy bueno como semilla armonica ( $ R  = 6.82 \times 10^{-13}$ ); malo como oculto por contacto desde $E_+$ .
lure_biased_q_0p99980_rank_0003	Si. Superviviente EFORK bounded_ nontrivial; rango (13.467, 3.376, 18.645)	No se registro filtro local posterior especifico en las salidas actuales. La prioridad bajo el flujo actual quedo por debajo de rank_0001 y rank_0004.	Bueno como superviviente numerico; no calificado como oculto. Se conserva como evidencia secundaria/redundante, no como mejor candidato.
lure_biased_q_0p99980_rank_0004	Si. Superviviente EFORK bounded_ nontrivial; rango (13.454, 3.372, 18.638)	Filtro local: 27 trayectorias crudas. Desde $E_+$ : 11/11 filas TARGET (8 direcciones unicas). Desde $E_-$ : 4/8 TARGET. Desde $E_0$ : 0/8.	Bueno como atractor numerico; malo como oculto, bloqueado con evidencia mas fuerte que rank_0001.
lure_biased_q_0p99980_rank_0005	Si. Superviviente EFORK bounded_ nontrivial; rango (13.394, 3.379, 18.606)	No se registro filtro local posterior especifico en las salidas actuales; se considero candidato de menor prioridad frente a los contactos ya detectados en la familia Lur'e.	Bueno como superviviente numerico; no se debe promover a oculto ni gastar computo adicional sin una razon nueva.

Candidato	Atractor observado	Pruebas lanzadas y targets	Calificacion final
branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000	Si. Mejor Machado por regla de seleccion; rango (13.499, 3.379, 18.665)	Barrido: 1 TARGET en muestra. Corrida refinada parcial: 1622 trayectorias desde $E_0$ , 1 TARGET. Prueba dirigida: 1/1 TARGET desde $E_-$ ; reproduccion: 1/1. Esferas: 0/1500. Robustez: 6/6 acotadas.	Bueno como atractor numerico y figura; malo como oculto por contacto dirigido reproducido desde $E_-$ .
branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699	Si. Segundo Machado top; usado tambien para localizar la referencia visual Danca.	Barrido: 1 TARGET en muestra. Corrida refinada grande: no ejecutada por guardia de costo. Prueba dirigida: 1/1 TARGET desde $E_-$ ; reproduccion: 1/1. Esferas: 0/1500. Robustez: 6/6 acotadas.	Bueno como atractor numerico; malo como oculto por contacto dirigido reproducido desde $E_-$ .

### 7.3. Detalle numerico de la replica Danca

La replica de Danca se corrio con ABM de Caputo e historia completa, no con memoria truncada. El articulo no da la condicion inicial exacta de la Fig. 3, por lo que se registro la mejor semilla localizada en las salidas:

$$x_0 = (3.039383585, -0.241686207, -6.873467365).$$

Con  $h = 0.05$ ,  $t_f = 500$ , transitorio 250,  $\delta = 0.01$  y semilla `machado_mu2_seed_project`, la trayectoria de referencia fue `bounded_nontrivial`. Sus valores numericos principales fueron:

$$\|X_f\| = 9.495281, \quad d(X_f, E_-) = 1.834312, \quad \Delta_{\text{tail}} = (11.344069, 3.292309, 17.035874),$$

$$\text{FFT peak} = 0.369963, \quad \text{PSD entropy} = 0.162207.$$

Tabla 5: Danca ABM: prueba local desde equilibrios inestables.

Eq.	$\delta$	Lanzadas	TARGET	Infinito	Fallas	Decision
$E_+$	0.01	100	54	46	0	<code>not_supported_by_Danca_delta_test</code>
$E_-$	0.01	100	48	52	0	<code>not_supported_by_Danca_delta_test</code>
Total	–	200	102	98	0	no oculto bajo esta prueba

Para las trayectorias Danca que si terminaron como TARGET, la distancia al equilibrio mas cercano al final quedo lejos de la vecindad inicial:

$$E_+ : n = 54, \quad d_{\text{mín}} = 0.275450, \quad d_{\text{med}} = 0.666168, \quad d_{\text{máx}} = 0.737682,$$

$$E_- : n = 48, \quad d_{\text{mín}} = 0.279070, \quad d_{\text{med}} = 0.677771, \quad d_{\text{máx}} = 0.738392.$$

Esto es importante: los targets no son pequenas oscilaciones pegadas al punto de equilibrio, sino trayectorias que salen de una vecindad de radio 0.01 y terminan en la geometria clasificada como atractor.

Tabla 6: Danca ABM contra clasificador del proyecto en corte  $xy$ , malla  $101 \times 101$ .

Contrato	Equilibrio	Target +	Target -	Infinito	Desconocido
Danca ABM, historia completa	1	514	462	8747	477
Proyecto EFORK/C, memoria finita	0	1	2	9097	1101

#### 7.4. Trayectorias lanzadas y targets

La tabla siguiente es la bitacora numerica compacta de los controles que decidieron la calificacion. Las filas de “esferas” son controles aleatorios por cascarones; las filas “dirigidas” son mas fuertes para bloquear ocultedad porque salen de una direccion concreta a distancia  $10^{-5}$  de un equilibrio.

Tabla 7: Trayectorias/condiciones iniciales lanzadas y contactos TARGET.

Candidato o prueba	Eq.	Radio/contrato	Lanzadas	TARGET	Lectura
chua_piecewise	$E_0$	$10^{-5}$ a $10^{-2}$	168	0	Todas quedaron como equilibrio operacional.
chua_piecewise	$E_+$	$10^{-5}$ a $10^{-2}$	168	12	Bloqueo de ocultedad: 4 targets en $r = 0.003$ y 8 en $r = 0.01$ .
chua_piecewise	$E_-$	$10^{-5}$ a $10^{-2}$	168	10	Bloqueo adicional: 3 targets en $r = 0.003$ y 7 en $r = 0.01$ .
Replica Danca ABM	$E_+$	$\delta = 0.01$	100	54	No soporta ocultedad local tipo Danca.
Replica Danca ABM	$E_-$	$\delta = 0.01$	100	48	No soporta ocultedad local tipo Danca.
Corte Danca ABM $xy$	–	malla $101 \times 101$	10201	976	Cuenca visual: 514 target positivo y 462 target negativo.
Corte proyecto EFORK $xy$	–	malla $101 \times 101$	10201	3	Comparacion no metodo-identica; muchos puntos divergen o quedan desconocidos.
rank_0001 Lur’e	$E_+$	dirigido $10^{-5}$	1	1	Una trayectoria basta para descartar ocultedad bajo ese contrato.
rank_0004 Lur’e	$E_+$	dirigido $10^{-5}$	11	11	8 direcciones TARGET unicas; evidencia fuerte contra ocultedad.
rank_0004 Lur’e	$E_0$	dirigido $10^{-5}$	8	0	Sin target desde $E_0$ , pero esto no compensa $E_+$ y $E_-$ .

Candidato o prueba	Eq.	Radio/contrato	Lanzadas	TARGET	Lectura
rank_0004 Lur'e	$E_-$	dirigido $10^{-5}$	8	4	Contacto desde equilibrio inestable; bloquea ocultedad.
branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000	$E_0$	Corrida 1 parcial	1622	0	Compatible solo en radios completados; no es <b>hidden_verified</b> .
branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000	$E_-$	dirigido $10^{-5}$	1	1	Contacto dirigido que bloquea ocultedad.
branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000	$E_-$	reproduccion $h = 0.005, L_m = 1$	1	1	Reproduce el bloqueo con contrato mas estricto.
branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699	$E_-$	dirigido $10^{-5}$	1	1	Contacto dirigido que bloquea ocultedad.
branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699	$E_-$	reproduccion $h = 0.005, L_m = 1$	1	1	Reproduce el bloqueo con contrato mas estricto.
Esferas top-3: rank_0001	$E_0, E_+, E_-$	radios $10^{-5}$ a $10^{-3}$	1500	0	No observa target en cascarones; no cancela el contacto dirigido desde $E_+$ .
Esferas top-3: Machado $\mu = 4$	$E_0, E_+, E_-$	radios $10^{-5}$ a $10^{-3}$	1500	0	No observa target en cascarones; no cancela el contacto dirigido desde $E_-$ .
Esferas top-3: Machado $\mu = 2$	$E_0, E_+, E_-$	radios $10^{-5}$ a $10^{-3}$	1500	0	No observa target en cascarones; no cancela el contacto dirigido desde $E_-$ .
Robustez geometrica top-3	-	6 contratos por candidato	18	-	18/18 acotadas, sin divergencia ni colapso; caracteriza persistencia, no ocultedad.

## 7.5. Comparacion con la variante arctan

La variante **arctan** se mantiene como caso seleccionable del pipeline, pero no es el foco de resultados de este reporte. La corrida historica con el mismo perfil rapido que el no suave encontro cruces Nyquist/DF, pero la rama seleccionada divergio durante la continuacion: el estado final quedo del orden de  $10^{10}$ . Por eso no habia referencia robusta para ejecutar la verificacion de ocultedad. La conclusion operacional es que el Chua no suave es el unico de esos dos casos que produjo un candidato acotado y analizable; el caso **arctan** requiere nueva rama, parametros o contrato numerico antes de compararlo cientificamente.

## 8. Funciones publicas de la libreria

Funcion	Uso documental
<code>hidden_attractors.models.equilibria_piecewise</code>	Calcular $E_0, E_+, E_-$ para el sistema de Chua no suave.
<code>hidden_attractors.models.rhs_piecewise</code>	Evaluar el campo vectorial usado por integradores Caputo/EFORK.
<code>hidden_attractors.io.load_trajectory_csv</code>	Cargar trayectorias reales con columnas $t, x, y, z$ .
<code>hidden_attractors.plotting.plot_phase_space</code>	Graficar espacio de fases 2D o 3D.
<code>hidden_attractors.plotting.plot_phase_projections</code>	Graficar proyecciones $xy, xz, yz$ .
<code>hidden_attractors.plotting.plot_time_series</code>	Graficar coordenadas contra el tiempo.
<code>hidden_attractors.analysis.bifurcation_points_from_trajectories</code>	Extraer maximos, minimos o muestras post-transitorias para diagramas de bifurcacion desde trayectorias ya calculadas.
<code>hidden_attractors.integrations.compute_complexity_measures</code>	Delegar medidas de complejidad a paquetes externos como <code>nolds</code> o <code>antropy</code> .

El mapa completo codigo-referencia vive en `docs/code_reference_map.md`.

## 9. Ejemplo ejecutable con trayectoria real

El ejemplo reproducible para las figuras de esta seccion usa la trayectoria:

```
outputs/extended_search/machado_targeted_verification_lm10_20260515_182252/trajectories/branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000_reference_attractor.csv
```

La llamada tiene esta forma:

```
python examples/dynamical_analysis_gallery.py \
--trajectory-csv <trajectory_csv> \
--output-dir outputs/examples/dynamical_analysis_real_trajectory_smoke
```

Internamente usa:

```
from hidden_attractors.io import load_trajectory_csv
from hidden_attractors.plotting import plot_phase_space
from hidden_attractors.plotting import plot_phase_projections
from hidden_attractors.plotting import plot_time_series
from hidden_attractors.analysis import bifurcation_points_from_trajectories
from hidden_attractors.plotting import plot_bifurcation_diagram
```

## 10. Figuras integradas y secciones de graficacion

Esta seccion ya no usa solo una galeria minima. Reune figuras reales tomadas de `outputs/` y figuras regeneradas con la API publica de la libreria. La intencion es que cada familia de graficas tenga una lectura matematica, una funcion o workflow asociado, y una indicacion clara de si la figura ya esta disponible o queda pendiente de recalcular.

## 10.1. Galeria API: trayectoria real cargada desde CSV

Estas figuras se regeneraron con `examples/dynamical_analysis_gallery.py` usando una trayectoria real de `outputs/extended_search/machado_targeted_verification_lm10_20260515_182252/trajectories/`. La llamada documentada fue:

```
python examples/dynamical_analysis_gallery.py ^  
--trajectory-csv <trajectory_csv> ^  
--output-dir outputs/examples/dynamical_analysis_real_trajectory_smoke
```

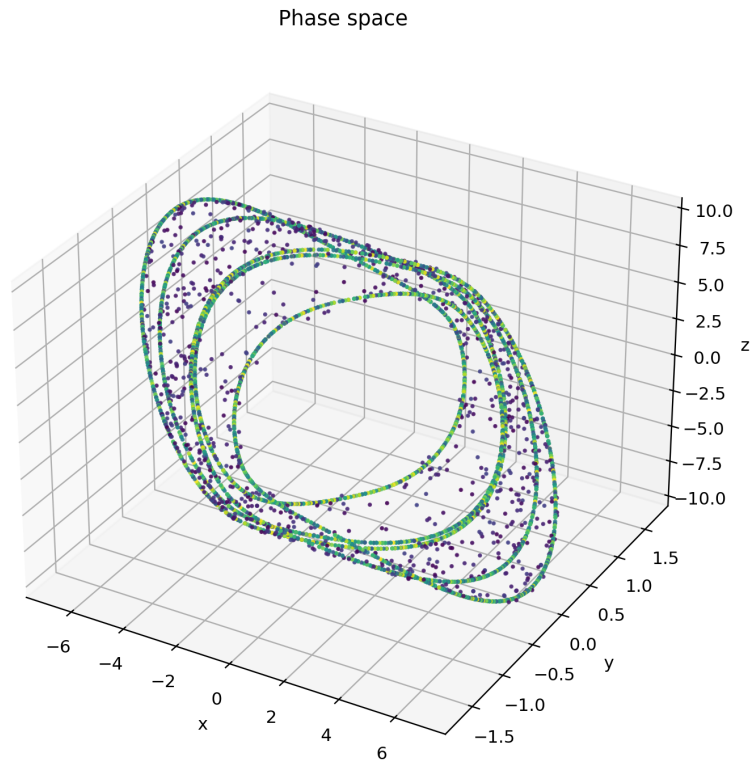


Figura 1: Espacio de fases 3D generado con `plot_phase_space`. La figura usa una trayectoria real con columnas `t, x, y, z`.

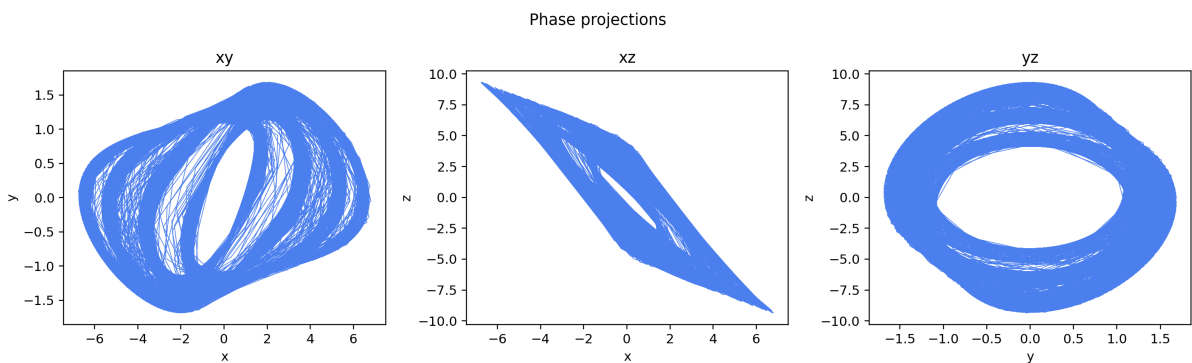


Figura 2: Proyecciones  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$  generadas con `plot_phase_projections`. Estas vistas son utiles para comparar geometria sin depender de la perspectiva 3D.

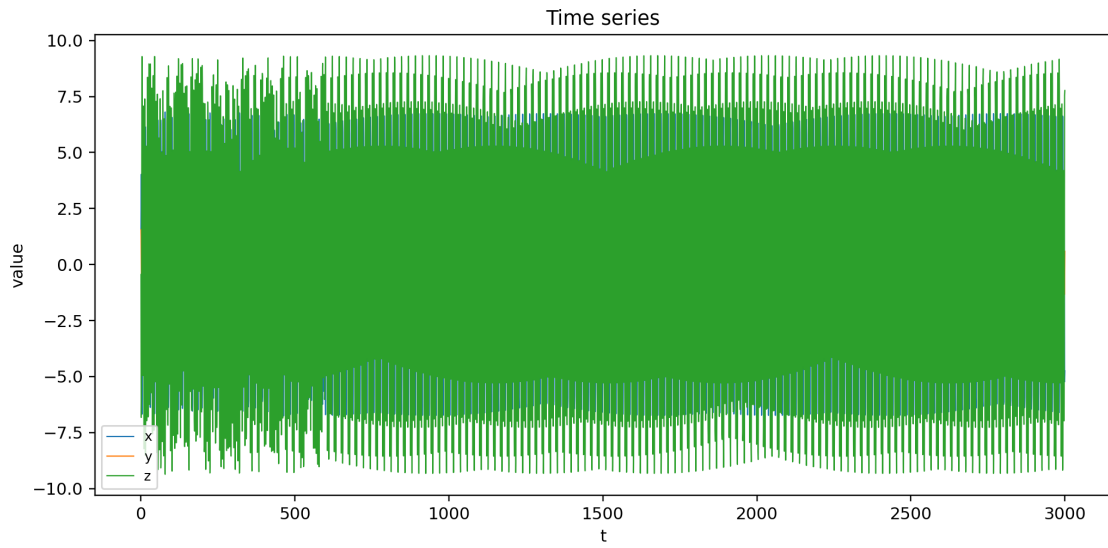


Figura 3: Series temporales  $x(t), y(t), z(t)$  generadas con `plot_time_series`. La lectura principal es boundedness, no ocultada.

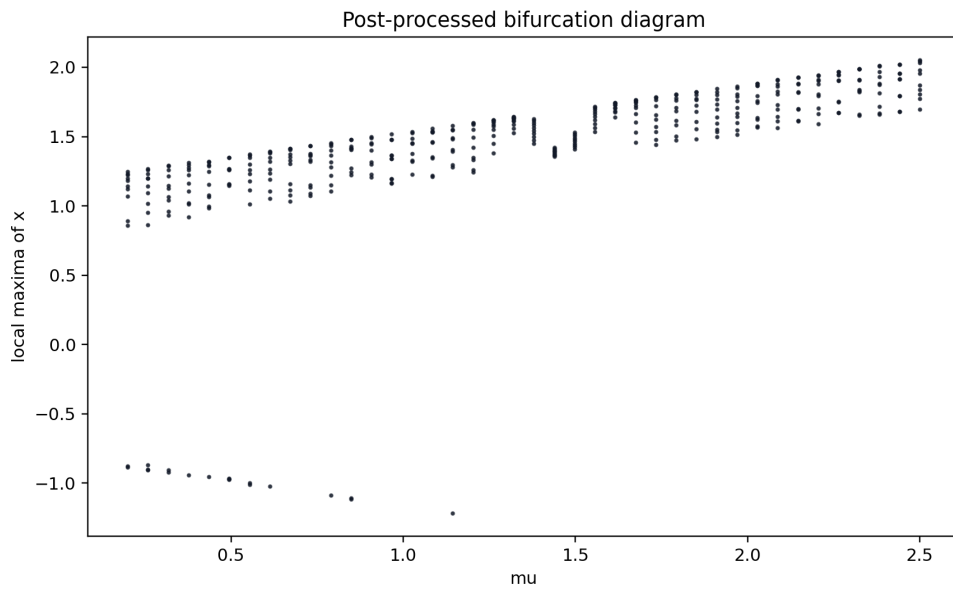


Figura 4: Diagrama de bifurcacion post-procesado con `bifurcation_points_from_trajectories` y `plot_bifurcation_diagram`. Esta figura no sustituye continuacion numerica.

## 10.2. Replica Danca y candidatos de referencia

El bloque Danca compara el atractivo reportado con las semillas candidatas del proyecto. La replica ABM usa historia completa de Caputo, mientras que los candidatos del proyecto usan contratos EFORK con memoria truncada. Por eso las figuras son comparables como evidencia geometrica, pero no metodo-identicas.

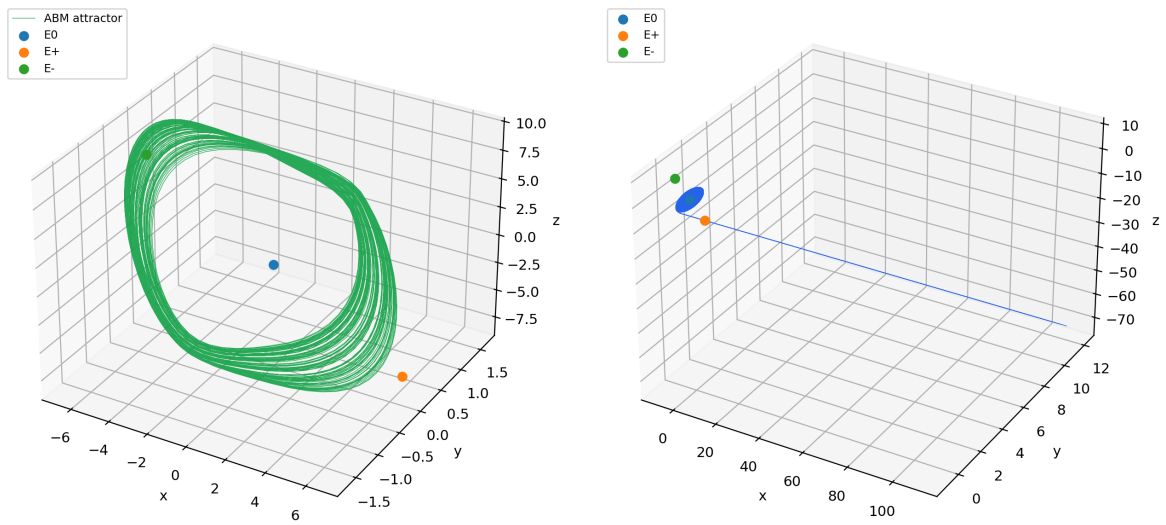


Figura 5: Replica local del atractor de Chua fraccionario no suave reportado por Danca en *Hidden Chaotic Attractors in Fractional-Order Systems*.

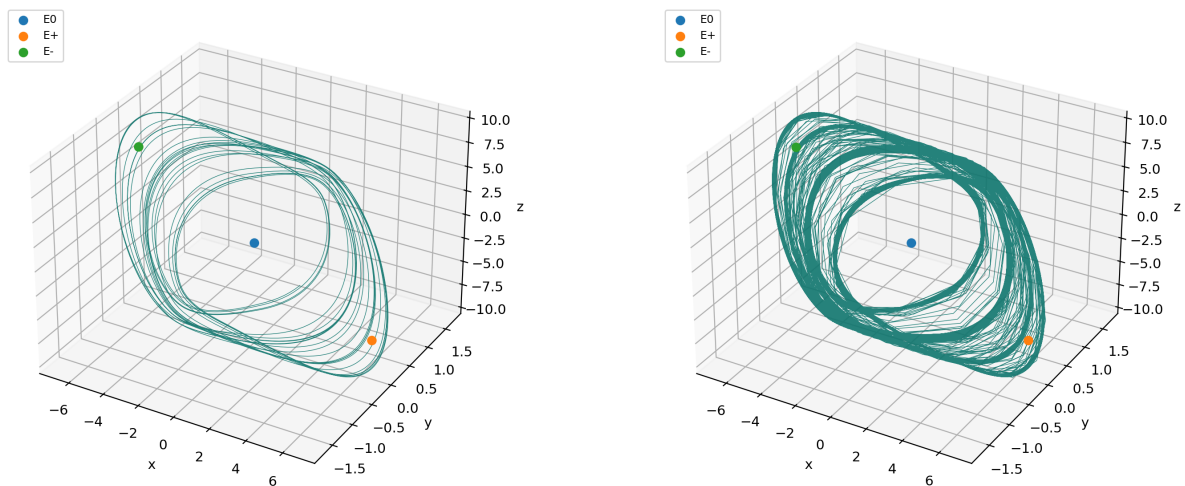


Figura 6: Comparacion visual de candidatos del proyecto: ruta Lur'e sesgada `rank_0001` y ruta tipo Machado `branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000`.

### **10.3. Cuencas y refinamiento de regiones**

Las cuencas son el bloque mas importante para la lectura de ocultedad. Un atractor candidato robusto no es necesariamente oculto: si la cuenca intersecta una vecindad de equilibrio, el candidato debe leerse como autoexcitado bajo el contrato probado.

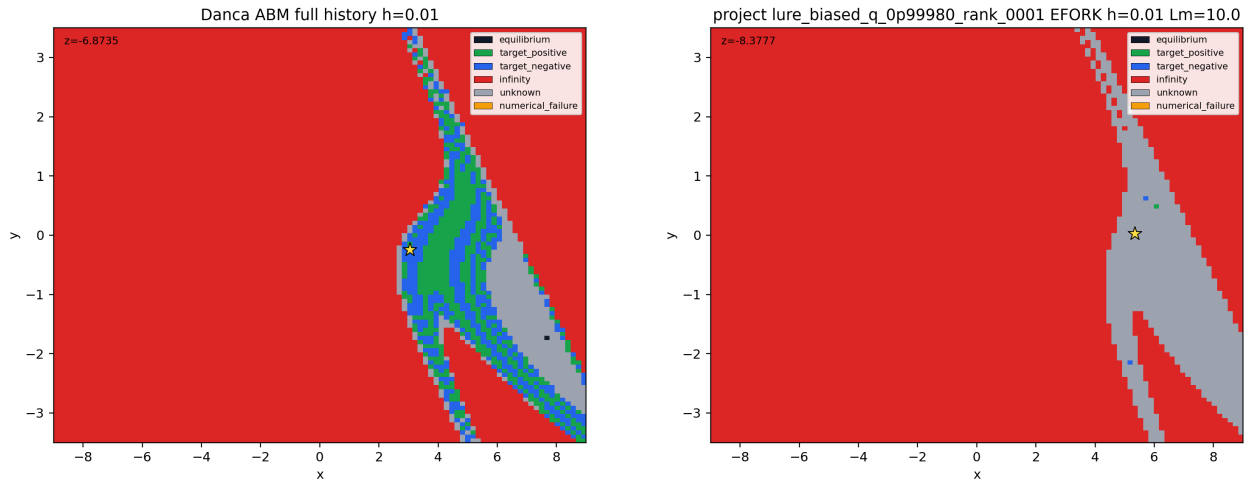


Figura 7: Cortes de cuenca  $xy$ : replica Danca ABM con historia completa y candidato del proyecto clasificado con el contrato EFORK/C.

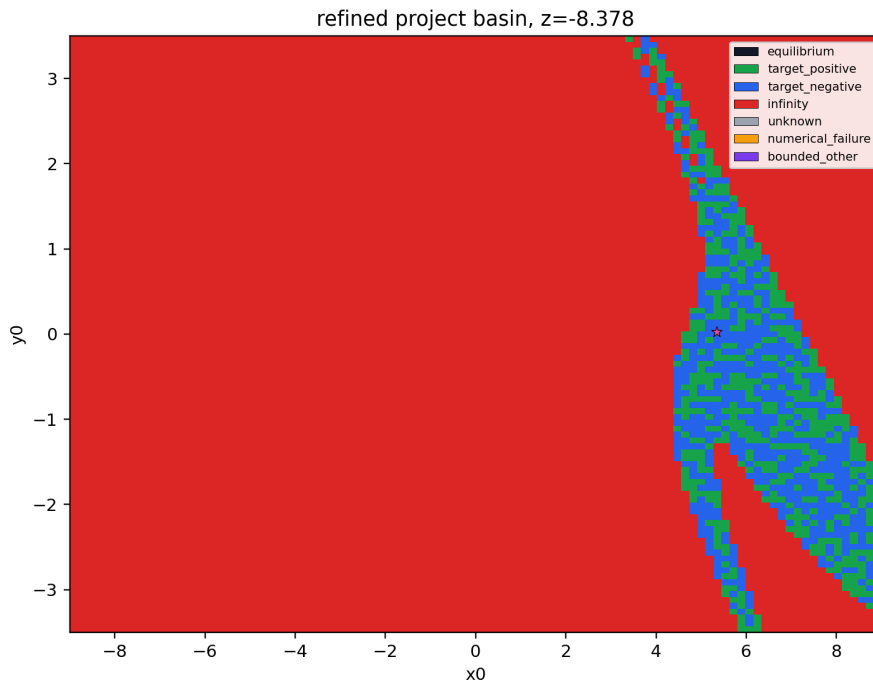
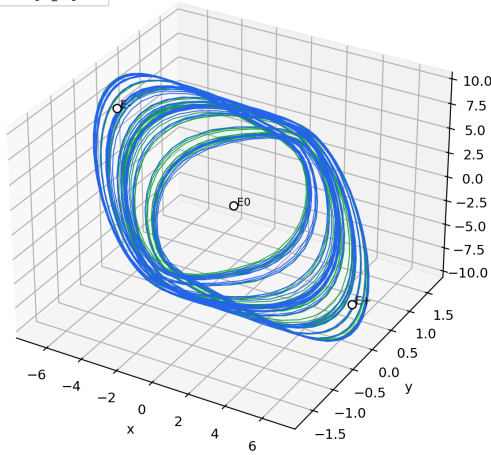


Figura 8: Cuenca refinada del candidato del proyecto para celdas previamente no resueltas. Esta grafica corresponde al workflow `hidden_attractors.workflows.refined_basin`.

Two target labels: same basin notion, opposite phase-space side

— target\_positive  
— target\_negative



How to read the basin labels

target\_positive: the initial condition reaches the bounded nontrivial target geometry on the positive side, typically mean  $x > 0$ .

target\_negative: the initial condition reaches the symmetric negative target geometry, typically mean  $x < 0$ .

For hiddenness tests, both count as target hits. If points near an equilibrium fall into either target class, that is evidence against hiddenness under the tested numerical contract.

The basin plot answers: which initial conditions ( $x_0, y_0, z_0$  fixed) fall into target\_positive/target\_negative/equilibrium/infinity/unknown?

Figura 9: Explicación visual de clases target/no-target alrededor de equilibrios. Esta familia de figuras conecta directamente la clasificación de cuenca con la definición operacional de ocultidad.

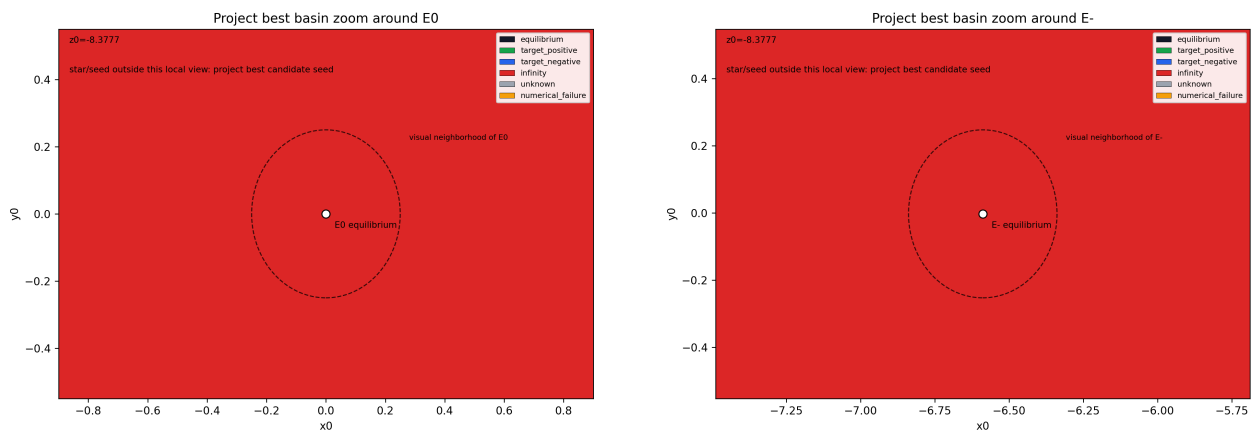


Figura 10: Zooms de cuenca alrededor de  $E_0$  y  $E_-$ . Estas figuras deben leerse junto con los radios, tiempos, memoria y tolerancias del contrato numerico.

#### 10.4. Verificación dirigida Machado

La ruta Machado usa una función descriptiva fraccionaria auxiliar como generador de semillas. El parámetro  $\mu$  de Machado no cambia el orden fraccionario  $q$  del sistema causal; solo modifica la búsqueda de semillas. La decisión final sigue dependiendo de las trayectorias Caputo/EFORK y de los controles desde vecindades de equilibrios.

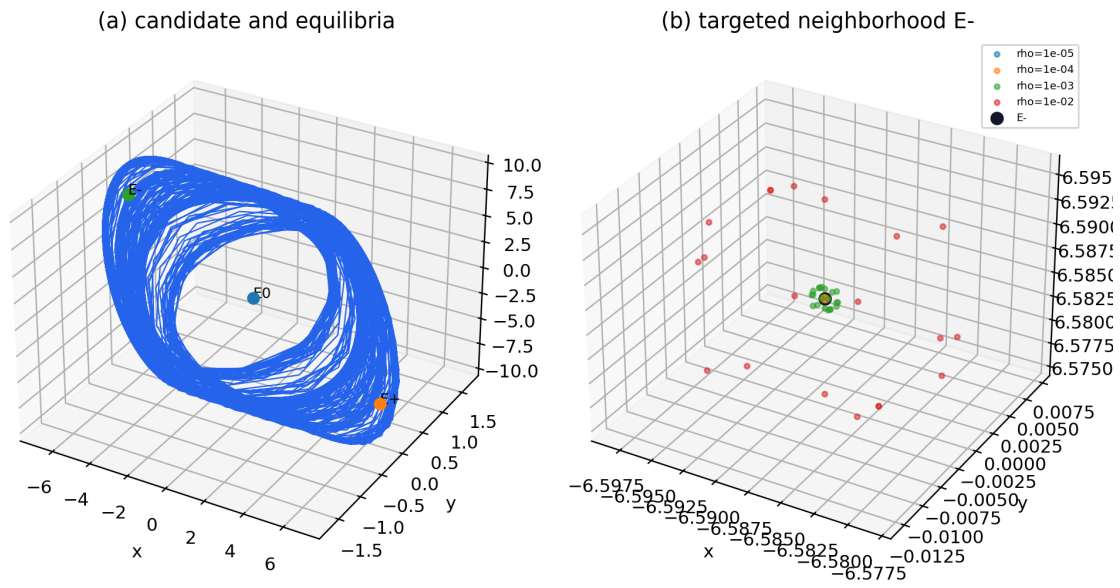


Figura 11: Verificación dirigida estilo articulo para `branch_0_mu_4p00000_theta_0p00000`. La figura resume contacto target/no-target desde vecindades de equilibrio.

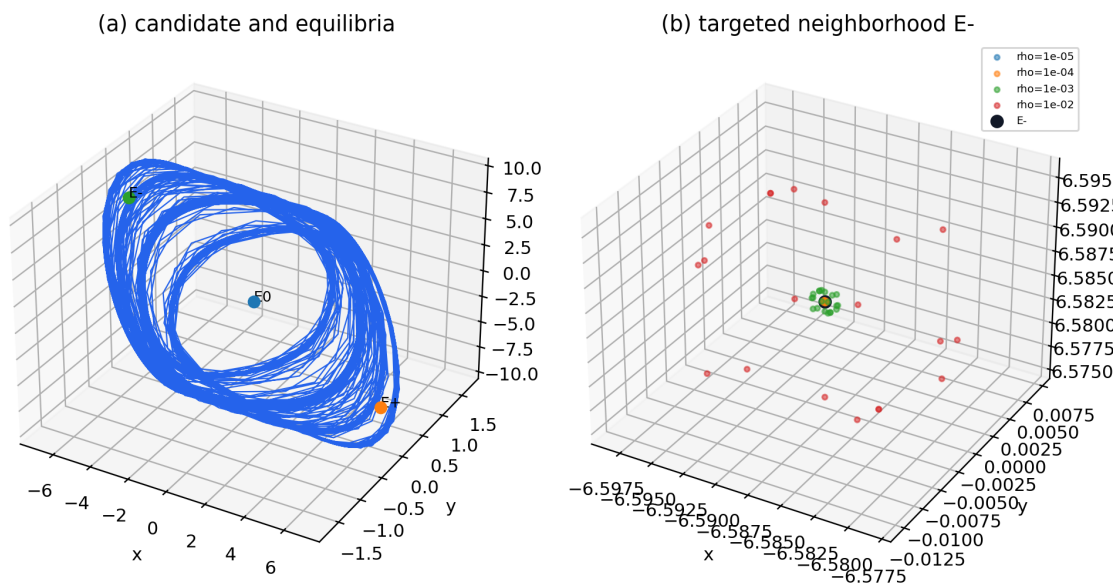
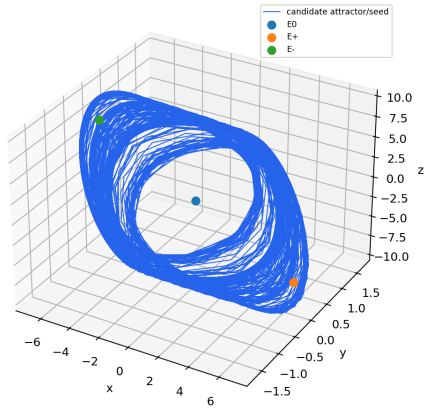


Figura 12: Verificación dirigida estilo articulo para `branch_0_mu_2p00000_theta_3p92699`.

branch\_0\_mu\_4p00000\_theta\_0p00000 targeted view



branch\_0\_mu\_2p00000\_theta\_3p92699 targeted view

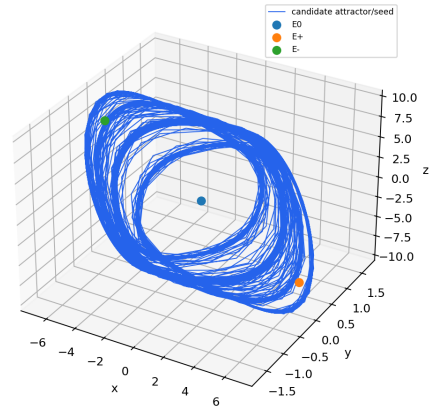


Figura 13: Atractores candidatos Machado y posición de equilibrios. Estas vistas muestran geometría global, no deciden ocultad por si solas.

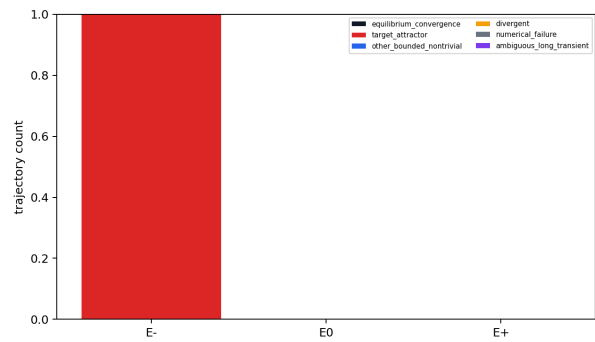
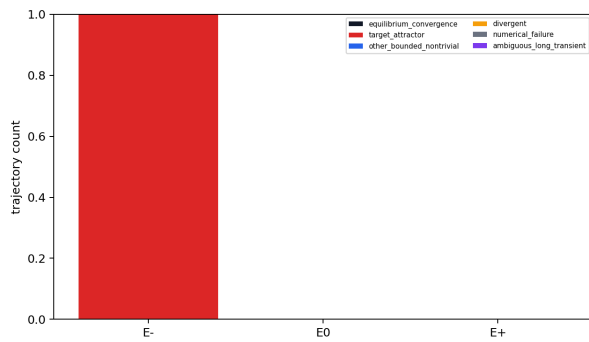


Figura 14: Clases por equilibrio para los dos candidatos Machado principales. La aparición de clases target desde un equilibrio bloquea la etiqueta de ocultad bajo ese contrato.

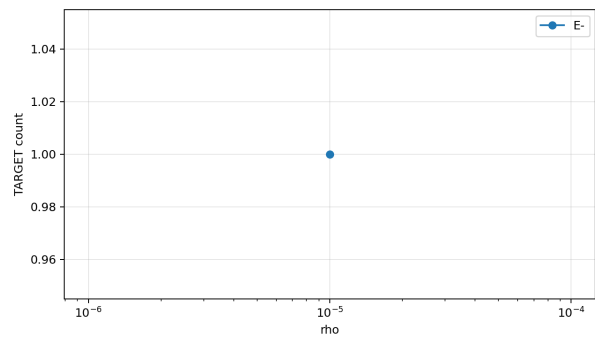
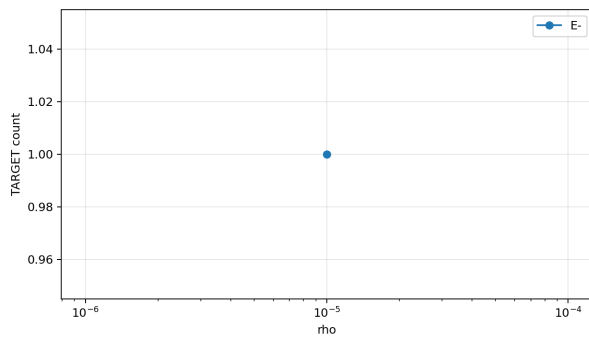


Figura 15: Contactos target contra radio para los dos candidatos Machado. Esta lectura debe dominar sobre una conclusión basada solo en retratos de fase.

## 10.5. Corrida refinada Machado

Las figuras de `outputs/extended_search/corrida1/plots/` agregan una capa mas estricta: radios, fracciones de clases y muestras locales en el plano de vecindad. Esta familia se usa para separar “no observado en esta muestra” de “bloqueado por contacto dirigido reproducido”.

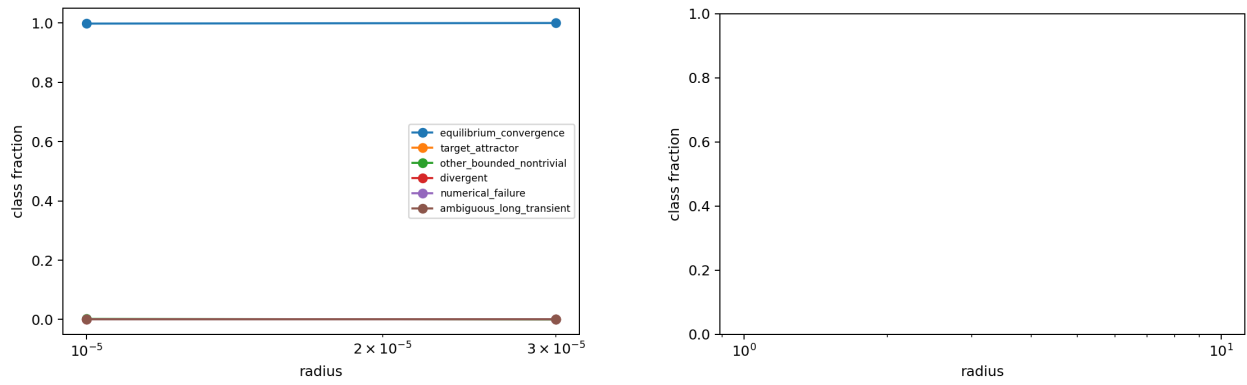


Figura 16: Fraccion de clases por radio y equilibrio para los candidatos refinados.

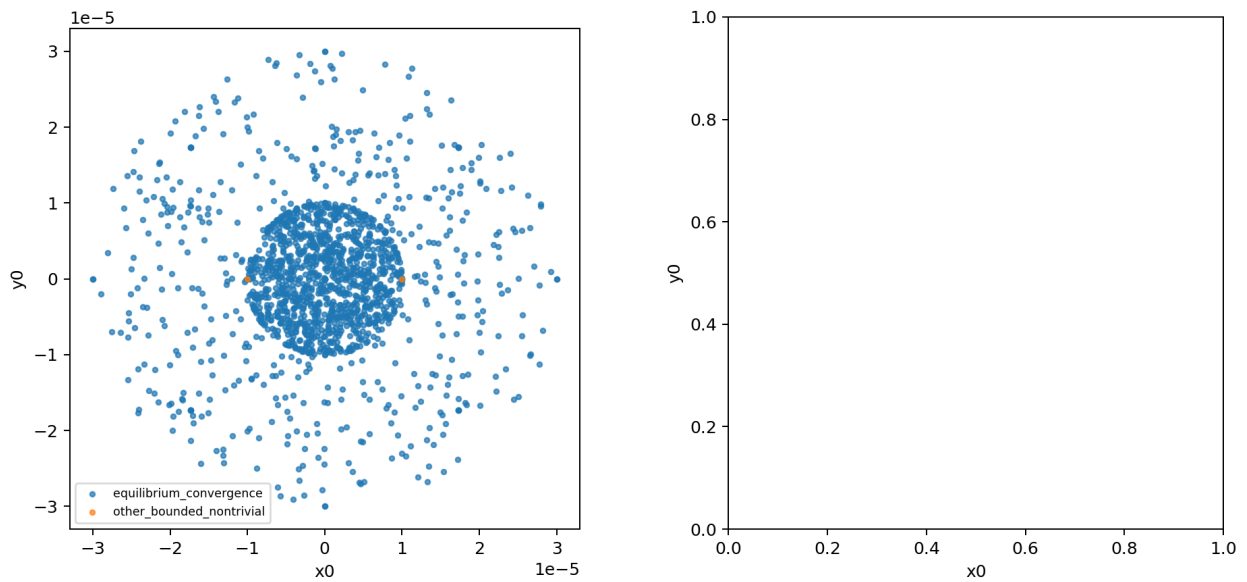


Figura 17: Muestras de vecindad usadas en la verificacion refinada Machado.

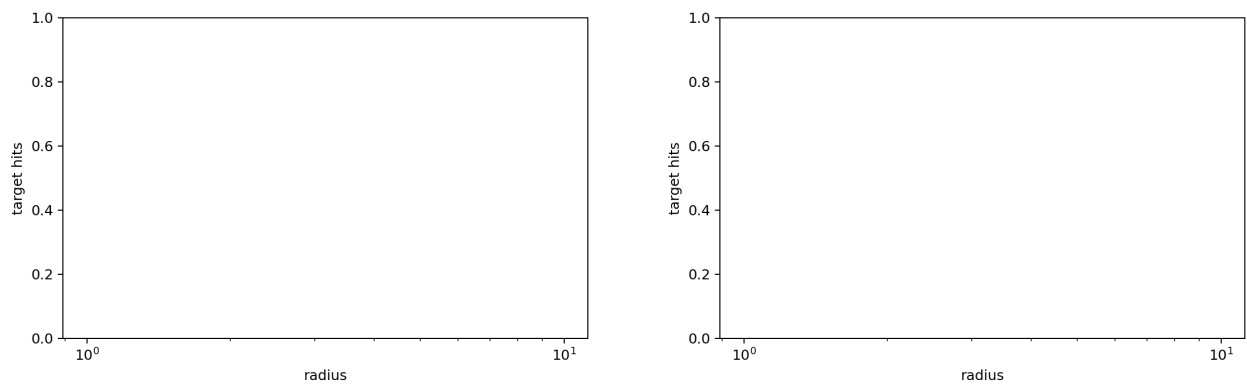


Figura 18: Contactos target contra radio desde  $E_-$  en la corrida refinada.

## 10.6. Robustez geometrica por contratos numericos

La robustez cambia  $h$ ,  $L_m$  y tiempo final para observar persistencia de la geometria del atractor. Esta seccion no prueba ocultedad; prueba si el atractor observado es numericamente persistente bajo variaciones del contrato.

lure\_biased\_q\_0p99980\_rank\_0001

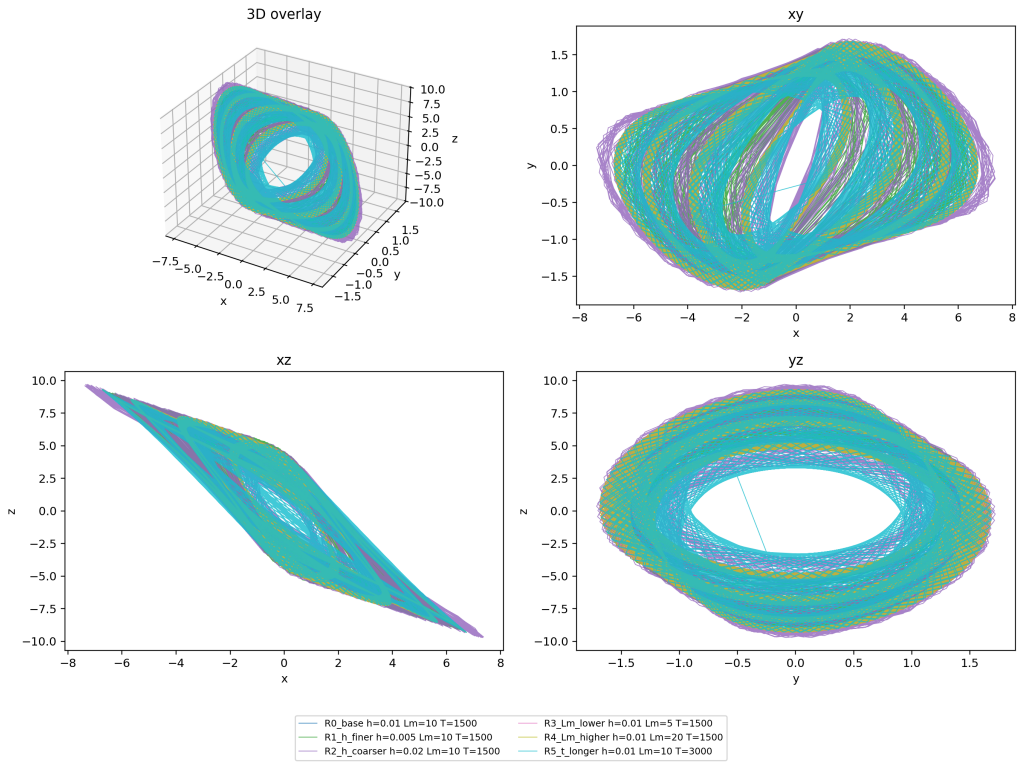


Figura 19: Superposicion de trayectorias de robustez para el candidato Lur'e sesgado.

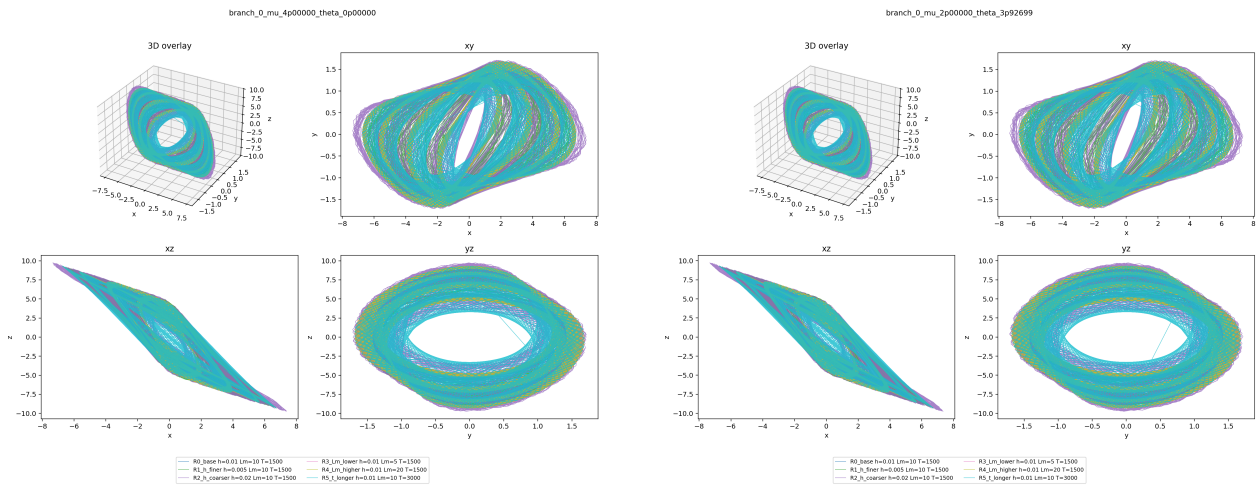


Figura 20: Superposiciones de robustez para los dos candidatos Machado principales.

## 10.7. Geometria esferica alrededor de equilibrios

La prueba por esferas muestrea cascarones alrededor de equilibrios y revisa si las trayectorias entran a una clase target. Esta evidencia es util para cartografiar la cuenca, pero no cancela un contacto dirigido ya reproducido.

Estas graficas usan `sphere_geometry_plot_window_segments_v2`: radio maximo  $10^{-3}$ , ventanas locales de ancho 0.02, segmentos EFORK cortos de  $t = 2$ , hasta 90 puntos por segmento y hasta 180 trayectorias por grafica local. En los cascarones completos hubo 1500 trayectorias por candidato y 0 TARGET en los tres candidatos top-3, pero esas figuras son visuales: no invalidan los contactos dirigidos que si aparecieron desde equilibrios.

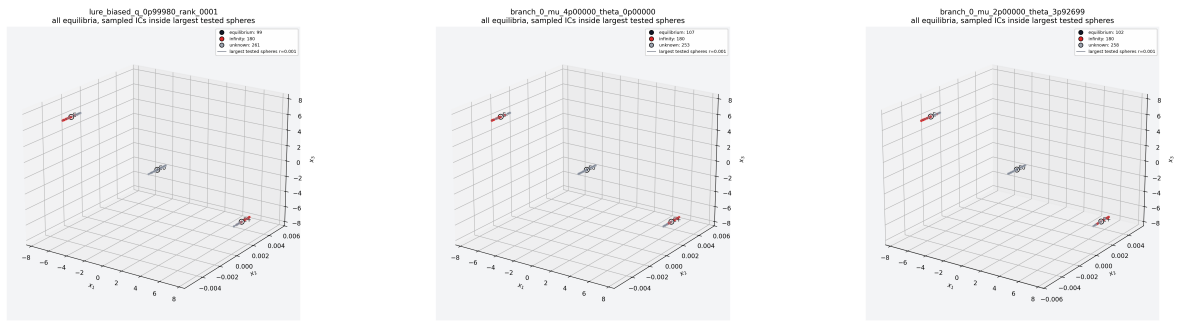


Figura 21: Resumen de geometria esferica para los tres candidatos top-3: Lur'e sesgado y dos candidatos Machado.

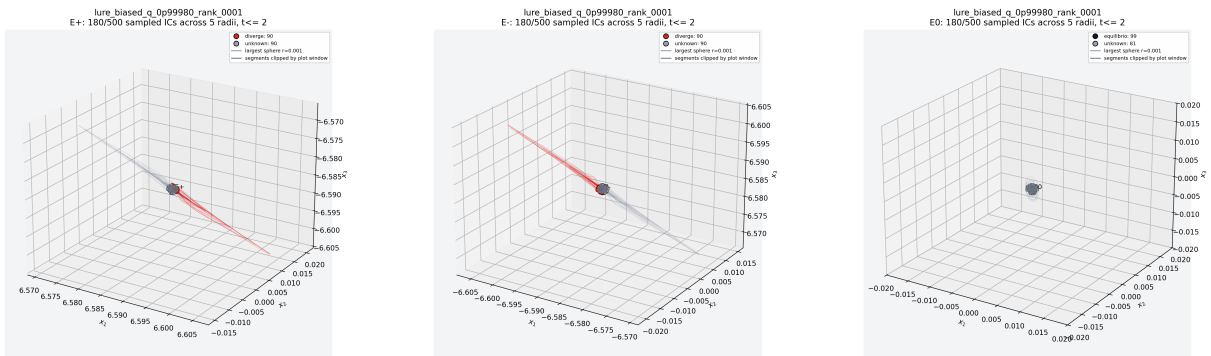


Figura 22: Geometria esferica por equilibrio para el candidato Lur'e sesgado rank\_0001.

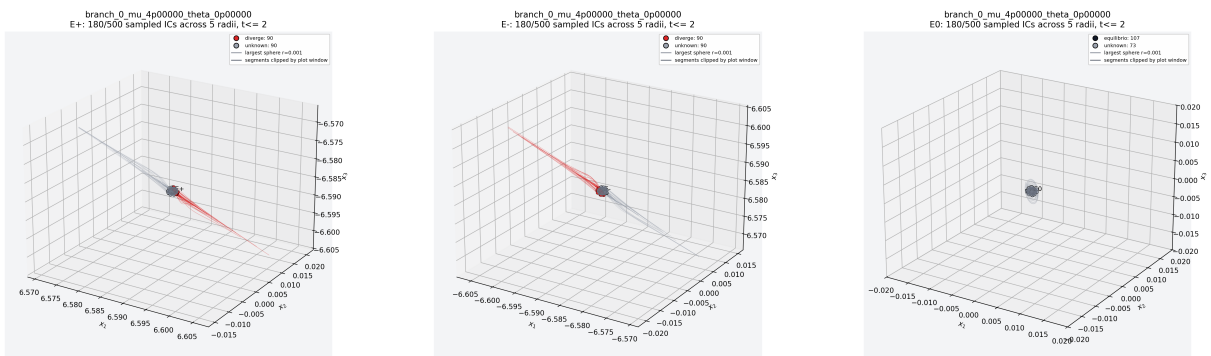


Figura 23: Trayectorias locales en volúmenes esfericos para el candidato Machado  $\mu = 4, \theta = 0$ , alrededor de  $E_+$ ,  $E_-$  y  $E_0$ .

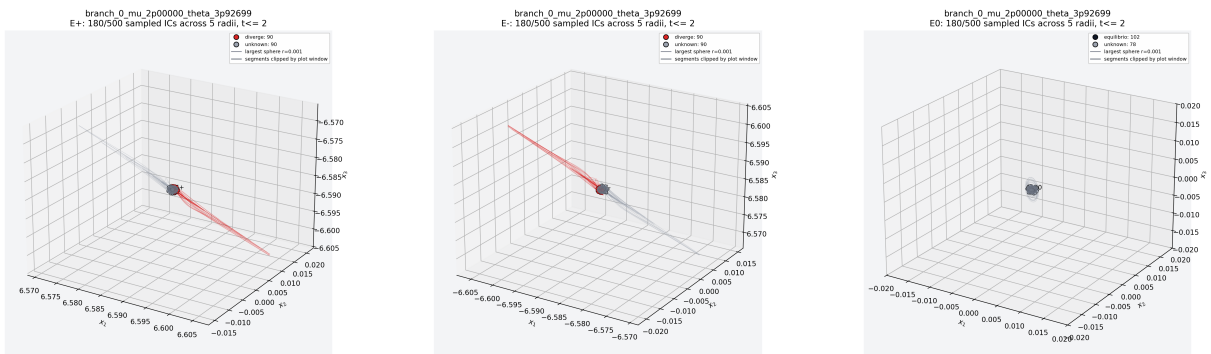


Figura 24: Trayectorias locales en volúmenes esfericos para el candidato Machado  $\mu = 2, \theta = 3.92699$ , alrededor de  $E_+$ ,  $E_-$  y  $E_0$ .

## 10.8. Figuras pendientes de regeneracion

El inventario de `GUIA_CODIGOS_PIPELINE.txt` define familias de figuras que deben quedar en la documentacion final. En el estado actual de `version_2/outputs` no aparecen todas con nombres canonicos, por lo que se dejan secciones explicitas para la siguiente corrida:

Familia pendiente	Como generarla o incorporarla
Nyquist/DF <code>fig01_nyquist_df</code> y <code>zoom</code> <code>fig01b_nyquist_zoom_x</code>	Ejecutar el pipeline legado o migrar el generador a <code>hidden_attractors.plotting</code> . Debe citar Genesio-Tesi y la forma de Lur'e usada.
Continuacion <code>fig02_continuation_progress</code> y <code>fig02b_continuation_story</code>	Regenerar desde <code>unified_nyquist_hidden_pipeline.py</code> o crear una API publica para leer <code>unified_continuation_summary.json</code> .
Seccion de referencia <code>fig04_reference_section</code> y sondas <code>fig05_probe_summary</code>	Migrar la visualizacion de secciones y conteos a funciones publicas. Debe quedar conectada a <code>section_points</code> .
Bifurcaciones densas <code>fig07_q</code> , <code>fig08_alpha</code> , <code>fig09_beta</code>	La API publica ya tiene post-procesamiento simple; falta exponer una corrida densa de parametros con CSV reproducible.
Cuencas $xz$ y $yz$ , <code>fig10b</code> , <code>fig10c</code>	Ejecutar <code>basin_only</code> o migrar <code>compute_basin_planes_c</code> a workflow publico documentado.
FFT/PSD, <code>fig11b_fft_spectrum</code> , <code>fig11_psd_welch</code>	Regenerar con <code>hidden-attractors-unified-cha-ppsd</code> ; citar que FFT/PSD caracterizan frecuencia, no ocultadad.
Lyapunov, <code>fig12_lyapunov_convergence</code>	Ejecutar backend Benettin solo bajo contrato explicito; citar los dos articulos de Benettin et al.
TISEAN/exportes externos	Mantener como adaptador opcional, con ruta de datos reproducible y cita al paquete/herramienta usada.

## 11. Referencias por metodo

Metodo o bloque	Articulo de referencia que debe citarse
Chua no suave	<i>Chaos in Chua's Circuit; Hidden Chaotic Attractors in Fractional-Order Systems.</i>
Derivada de Caputo	<i>Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II.</i>
Estabilidad fraccionaria	<i>Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing.</i>
Hidden/self-excited	<i>Hidden Attractors in Dynamical Systems: From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuits; Hidden Attractors in Dynamical Systems: Systems with No Equilibria, Multistability and Coexisting Attractors.</i>
ABM fraccionario	<i>A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations.</i>
Lur'e/armonico balance	<i>A Frequency Approach for Analyzing and Controlling Chaos in Nonlinear Circuits.</i>

Metodo o bloque	Articulo de referencia que debe citarse
Lyapunov	<i>Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; A Method for Computing All of Them. Part 1: Theory y Part 2: Numerical Application.</i>
Machado-style seeds	Seccion “Forma de Lur’e, funcion descriptiva y semillas” de este reporte; la cita completa debe fijarse antes de publicar si se usa como referencia externa primaria.

## 12. Bibliografia minima

### Referencias

- [1] R. N. Madan and L. O. Chua. *Chaos in Chua’s Circuit*. IEE Proceedings D: Control Theory and Applications, 1986.
- [2] M. Caputo. *Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II*. Geophysical Journal International, 1967.
- [3] D. Matignon. *Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing*. Computational Engineering in Systems Applications, 1996.
- [4] M. F. Danca. *Hidden Chaotic Attractors in Fractional-Order Systems*. Nonlinear Dynamics, 2017.
- [5] G. A. Leonov and N. V. Kuznetsov. *Hidden Attractors in Dynamical Systems: From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuits*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2013.
- [6] N. V. Kuznetsov. *Hidden Attractors in Dynamical Systems: Systems with No Equilibria, Multistability and Coexisting Attractors*. Physics Reports, 2016.
- [7] R. Genesio, A. Tesi, and F. Villorosi. *A Frequency Approach for Analyzing and Controlling Chaos in Nonlinear Circuits*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 1993.
- [8] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. *A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations*. Nonlinear Dynamics, 2002.
- [9] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; A Method for Computing All of Them. Part 1: Theory*. Meccanica, 1980.
- [10] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; A Method for Computing All of Them. Part 2: Numerical Application*. Meccanica, 1980.
- [11] M. S. Tavazoei and M. Haeri. *A Proof for Non Existence of Periodic Solutions in Time Invariant Fractional Order Systems*. Automatica, 2009.